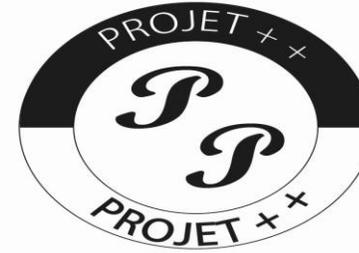


Webinaire N°1

Par: Alphonse EBROTIE



**APPRENTISSAGE ET MODELISATION DE PROCESSUS
STOCHASTIQUES PAR DES RESEAUX DE NEURONES**

17 Juin 2023

Présentation du sujet

- ❑ **Objectif**: calibrage de réseaux de neurones capables de modéliser des données provenant de processus définis par des équations différentielles stochastiques (EDS) ;
- ❑ **Intérêt d'un tel sujet** ;
- ❑ **Outils utilisés** ;
- ❑ **Compétences développées** : Apprentissage statistique ,
Intégration numérique , calcul stochastique , deep learning .

Méthodologie générale et simple

- ❑ Génération de données
- ❑ Construction et calibrage du réseau de neurones pour la modélisation des données;

□ Génération de données

➤ Utilisation de schémas d'intégration numérique:

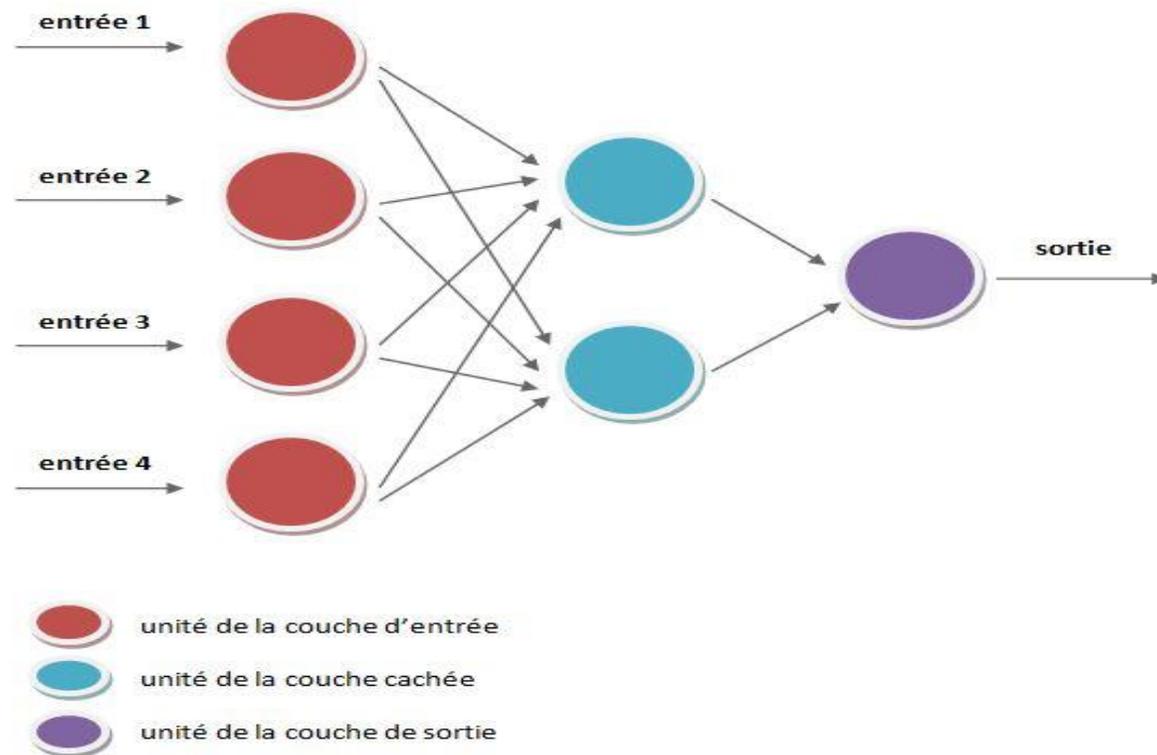
Euler-Maruyama ;

Milshtein ;

Runge-Kunta .

□ Calibrage du réseau de neurones

- Qu'est ce qu'un réseau de neurones ?



□ Calibrage du réseau de neurones

■ Architecture du réseau de neurones

➤ **Dynamique générale de notre processus aléatoire :**

$$dX_t = \mathcal{F}(X_t, t)dt + \mathcal{L}(X_t, t)d\mathcal{B}_t$$

$$X_{t+\Delta} = X_t + \Delta\mathcal{F}(X_t, t) + \mathcal{L}(X_t, t)(\mathcal{B}_{t+\Delta} - \mathcal{B}_t)$$

➤ **Architecture du réseau de neurones :**

$$dX_t = (A_1X_t + A_2X_t \times A_3X_t)dt + BX_t d\mathcal{B}_t$$

$$X_{t+\Delta} = X_t + (A_1X_t + A_2X_t \times A_3X_t)\Delta + BX_t(\mathcal{B}_{t+\Delta} - \mathcal{B}_t)$$

■ Calibrage et vérifications

➤ Fonction de perte

$$X_{t+\Delta} = X_t + (A_1 + A_2 \times A_3)X_t\Delta + BX_t(\mathcal{B}_{t+\Delta} - \mathcal{B}_t)$$

Et ,

$$X_{t+\Delta} \sim \mathcal{N}(X_t + \Delta\mathcal{F}(X_t, t), \Delta\mathcal{L}(X_t, t)\mathcal{L}^T(X_t, t))$$

Posant

$$m_t = X_t + \Delta\mathcal{F}(X_t, t), \Sigma_t = \mathcal{L}(X_t, t)\mathcal{L}(X_t, t)^T$$

, on obtient :

$$p(X_{t+\Delta}|X_t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\Delta|\Sigma_t|}} \exp\left(-\frac{(X_{t+\Delta} - \mathbf{m}_t)^T \Sigma_t^{-1} (X_{t+\Delta} - \mathbf{m}_t)}{2\Delta}\right)$$

Et de la log-vraisemblance de $p(X_{t+\Delta}|X_t)$, il en découle :

$$\arg \min_{\omega, \varphi} \sum_{t=0}^T \|x_{t+\Delta} - m_t\|_{\Sigma_t^{-1}} + \sum_{t=0}^T \log(|\Sigma_t|)$$

, où $\omega = (A_1, A_2, A_3)$ et $\varphi = B$.

■ Calibrage et vérifications

➤ Estimateurs de F et Σ

$$\hat{\mathcal{F}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{X_{t_j+\Delta} - X_{t_j}}{\Delta}$$

estimation de la partie
déterministe

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta \left(\frac{X_{t_j+\Delta} - X_{t_j}}{\Delta} - \hat{\mathcal{F}} \right)^2$$

estimation de Σ pour déduire
la partie stochastique

□ Application au modèle de Black & Scholes

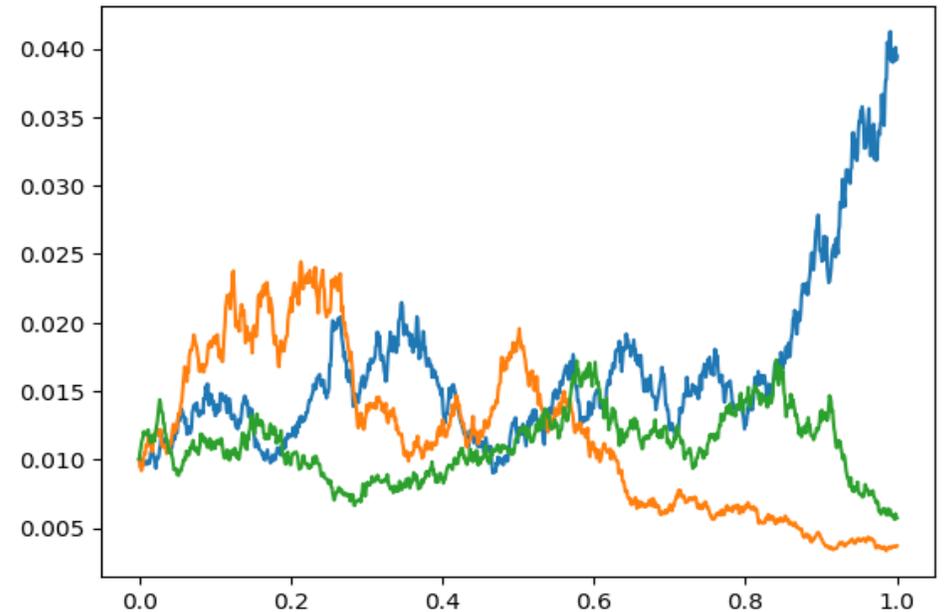
■ Calibrage en dimension 1

➤ **Dynamique du processus de Black & Scholes :**

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

$$\mu = 0.5 \text{ et } \sigma = 1$$

➤ **Génération de données avec Euler-Maruyama :**

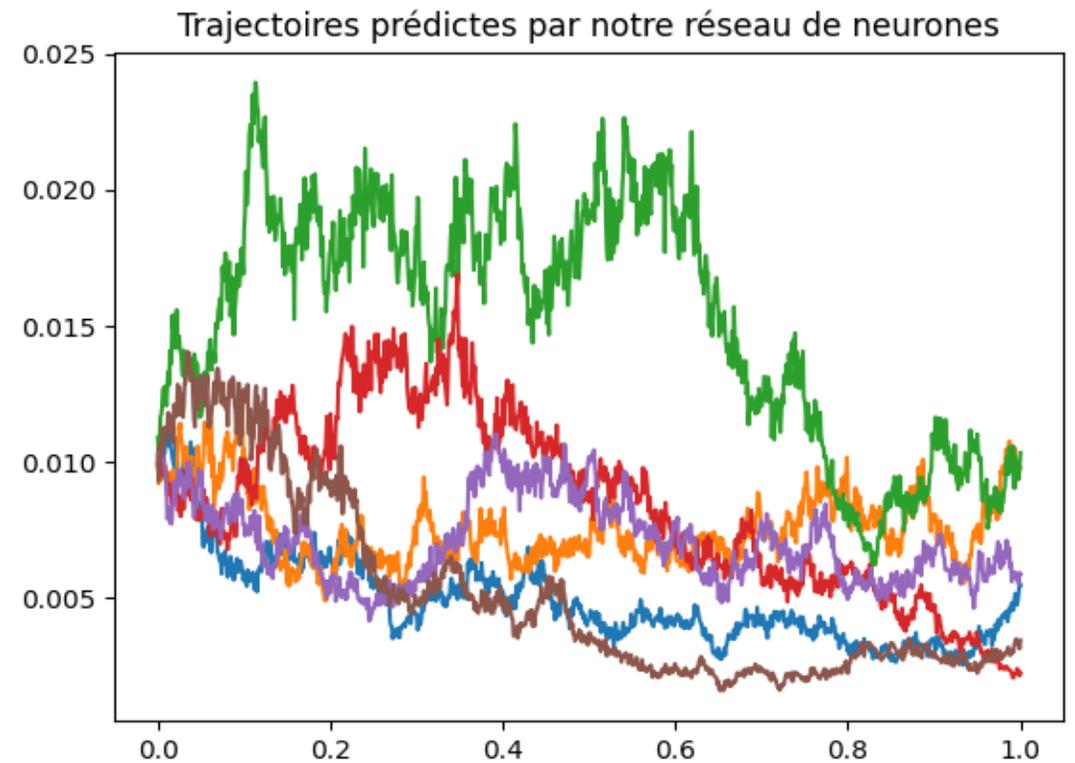
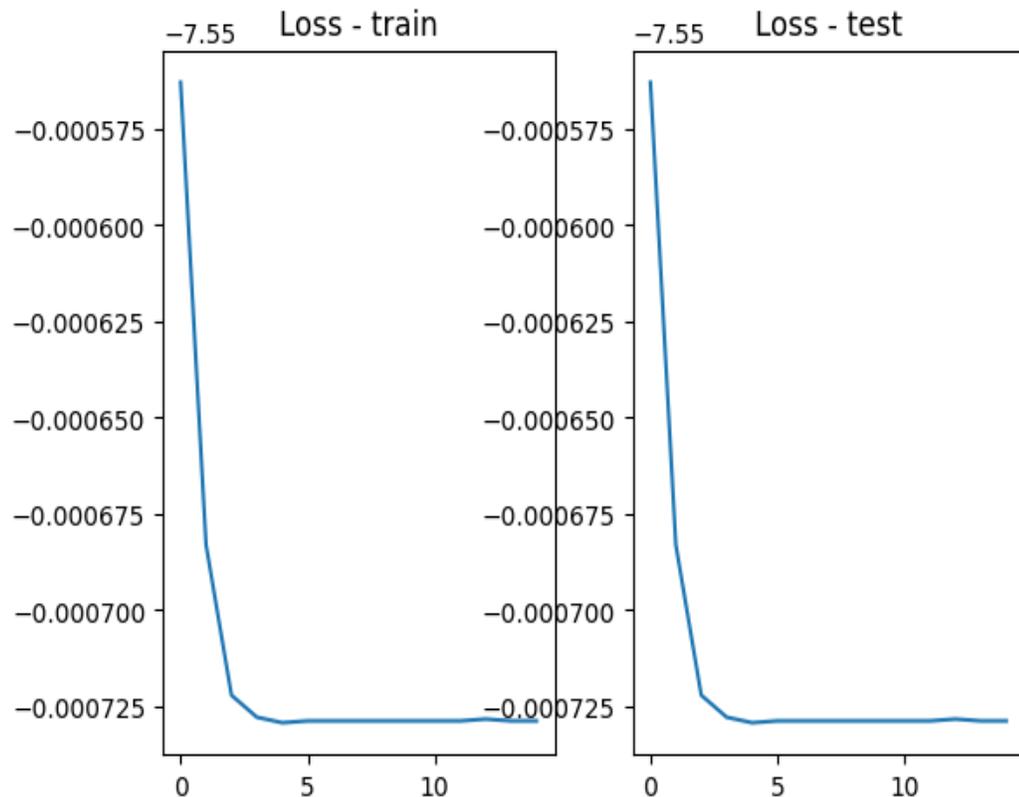


□ Application au modèle de Black & Scholes

■ Calibrage en dimension 1

➤ **Courbe d'apprentissage du modèle:**

➤ **Prédictions du réseau de neurones:**



□ Application au modèle de Black & Scholes

■ Calibrage en dimension 1

➤ Paramètres du modèle :

$$dX_t = (A_1 X_t + A_2 X_t \times A_3 X_t) dt + B X_t dB_t$$
$$X_{t+\Delta} = X_t + (A_1 X_t + A_2 X_t \times A_3 X_t) \Delta + B X_t (\mathcal{B}_{t+\Delta} - \mathcal{B}_t)$$

$$dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dB_t)$$

Valeur du paramètre A1 : 0.4846

Valeur du paramètre A2 : -0.0001

Valeur du paramètre A3 : -0.0001

Valeur du paramètre B : 1.0037

Valeur de A2*A3 : 0.0000

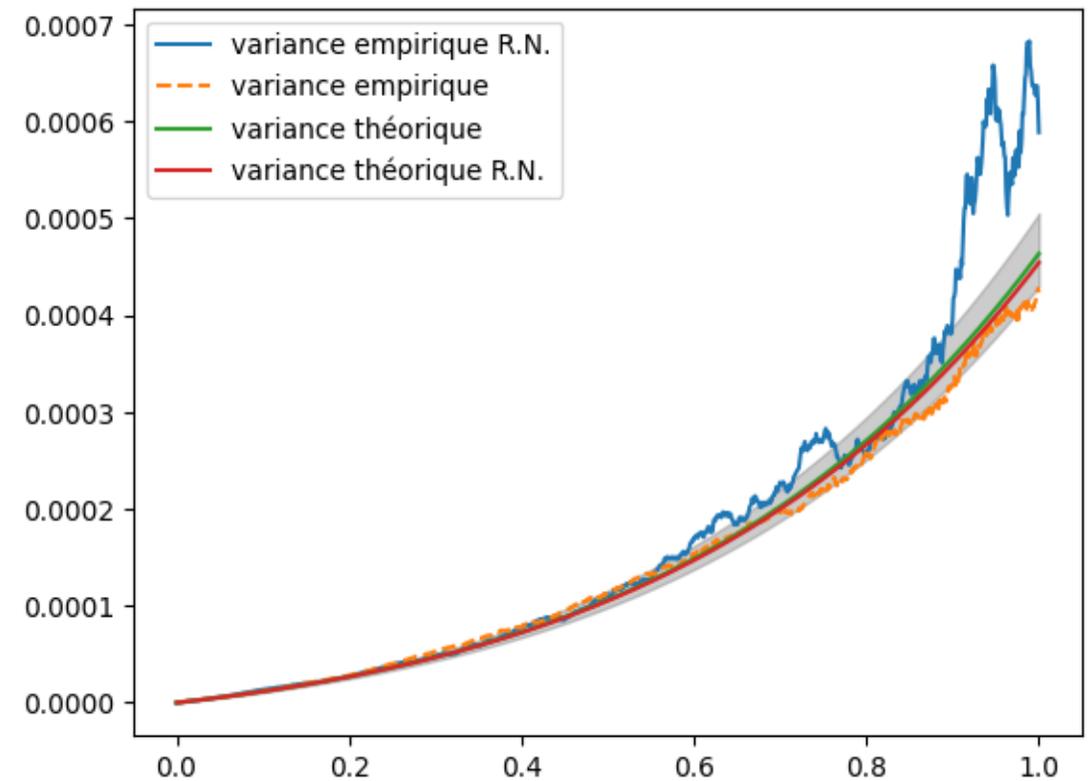
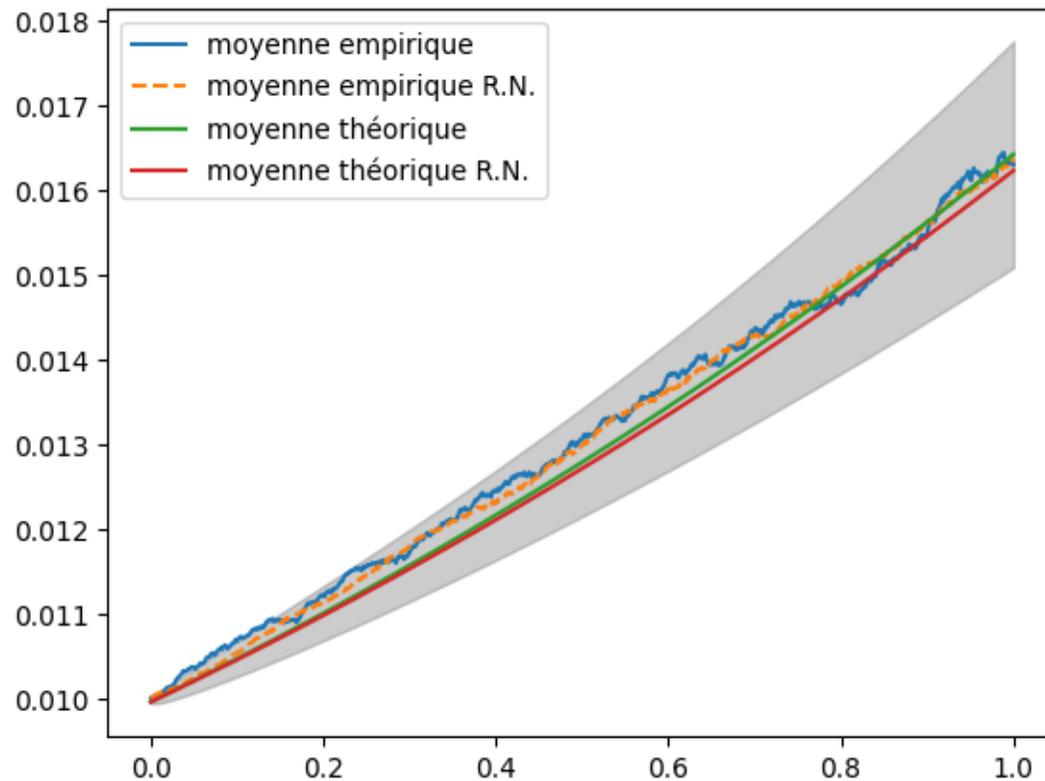
$$\mu = 0.5 \text{ et } \sigma = 1$$

□ Application au modèle de Black & Scholes

■ Calibrage en dimension 1

➤ Moyennes empiriques et théoriques :

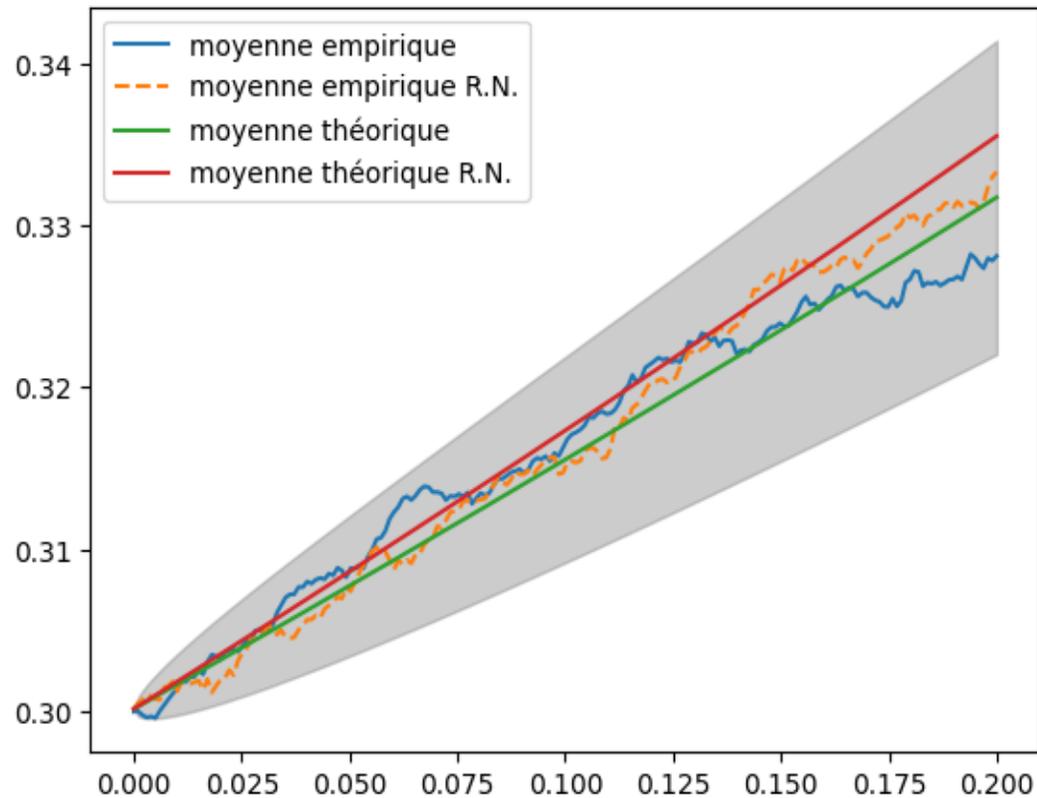
➤ Variances empiriques et théoriques :



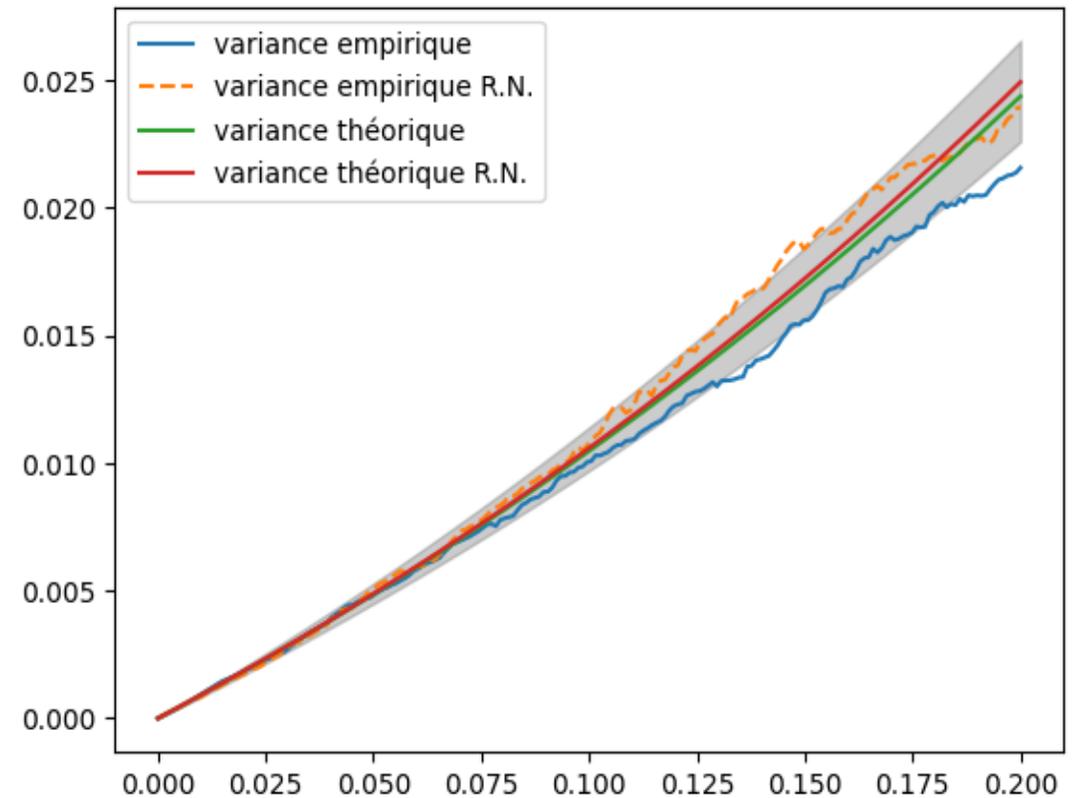
□ Application au modèle de Black & Scholes

■ Calibrage en dimension 2

➤ Moyennes empiriques et théoriques :



➤ Variances empiriques et théoriques :



□ Le modèle Lorenz-63 Stochastique

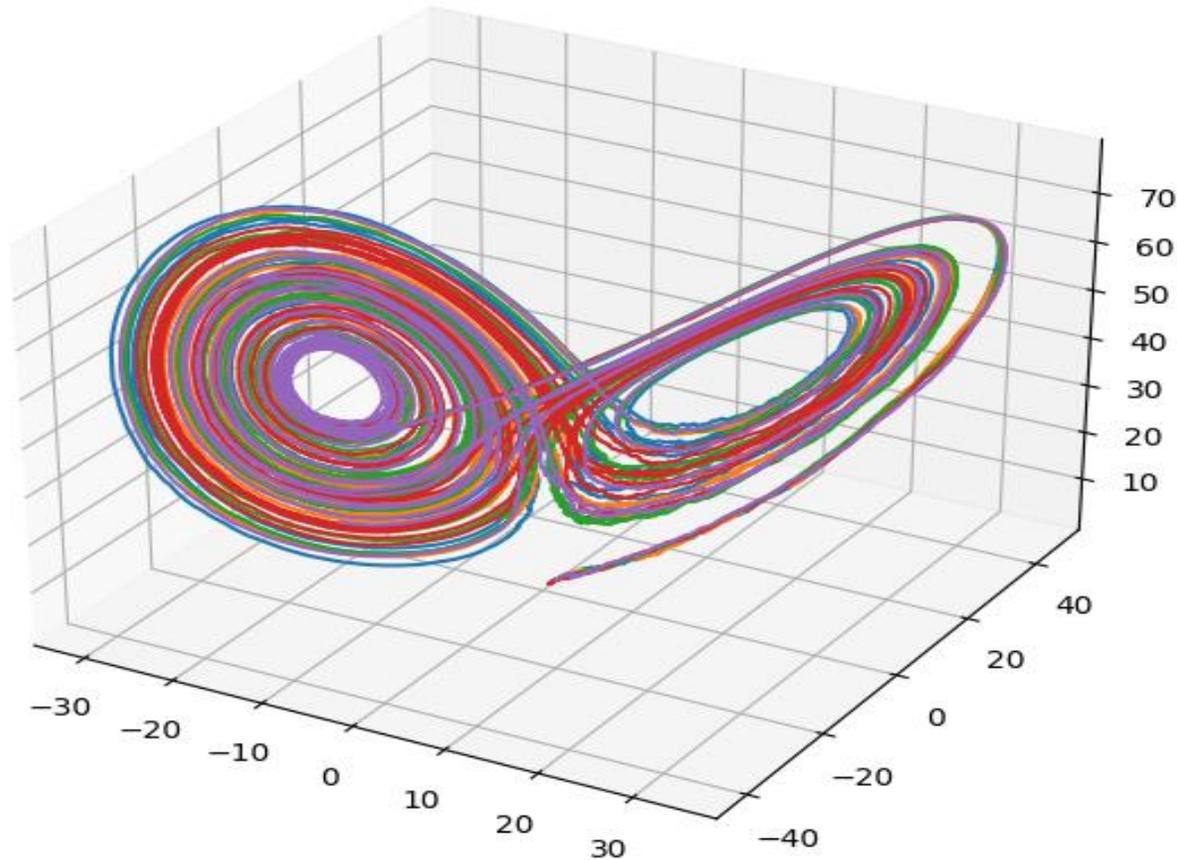
■ Présentation de la dynamique du processus

$$\begin{cases} dx = (\sigma y - (\sigma + (2/\gamma))x)dt \\ dy = ((\rho - z)x - (1 + (2/\gamma))y)dt + ((\rho - z)/\sqrt{\gamma})d\beta_t \\ dz = (xy - (\beta + (4/\gamma))z)dt + (y/\sqrt{\gamma})d\beta_t \end{cases}$$

➤ **Spécificité : Les coordonnées sont dépendantes**

□ Difficultés et perspectives : Lorenz-63 Stochastique

■ Exemple de trajectoires

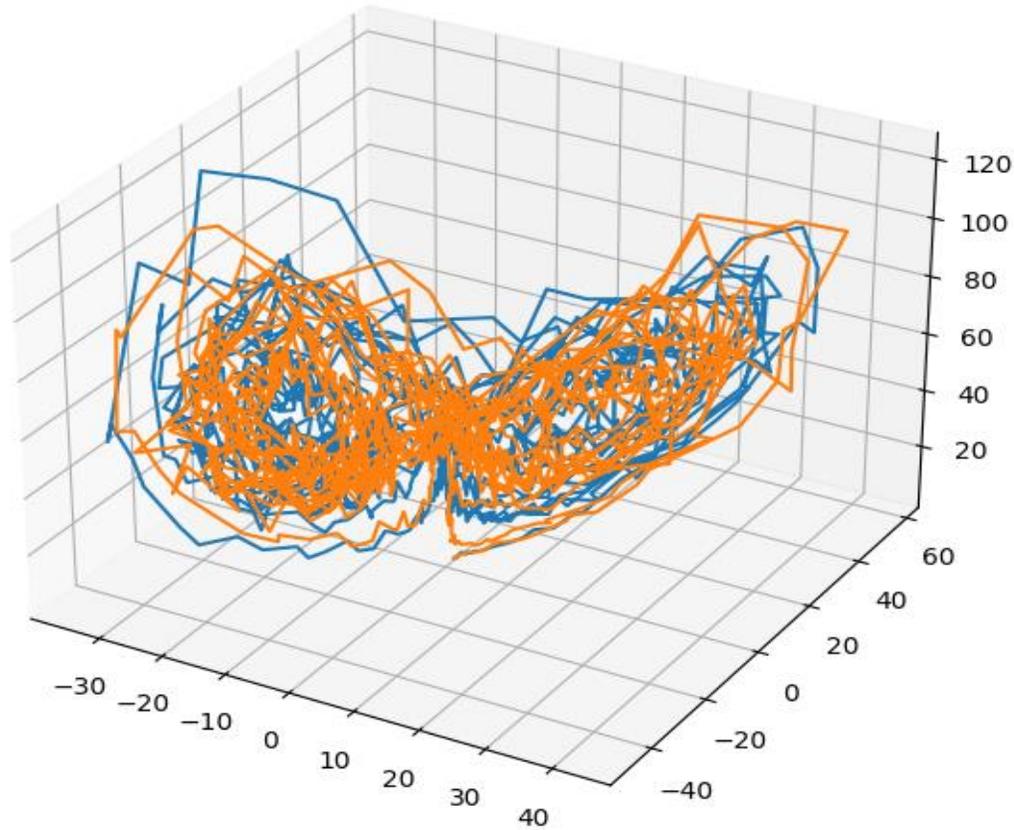


$$\sigma = 17; \rho = 45; \beta = 5.5; \gamma = 50$$

$$x_0, y_0, z_0 = 1, 1, 1; T = 10; dt = 0.001$$

□ Le modèle Lorenz-63 Stochastique

- Exemple de trajectoires prédites par le réseau de neurones



- Reproduit la forme générale ;
- Fluctuations non négligeables .

□ Difficultés et perspectives : Lorenz-63 Stochastique

■ Difficultés

- Difficile de reproduire la tendance en raison du temps de calculs très conséquent ;
- Problème d'estimation des paramètres de l'équation à partir des estimateurs .

□ Difficultés et perspectives : Lorenz-63 Stochastique

■ Perspectives d'améliorations

- Explorer les pistes de résolutions numériques des équations pour estimer les paramètres ;
- Utilisation de GPU plus puissants .

CONCLUSION